

第3讲 三角形倒角模型

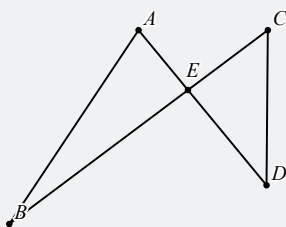
一、基本模型

飞镖模型	8字模型	双垂模型	Rt△模型
$\angle D = \angle B + \angle A + \angle C$	$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$	$\angle 1 = \angle B \quad \angle 2 = \angle A$	$\angle 1 = \angle B \quad \angle 2 = \angle A$

【教法备注】

1、8字模型： $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

证明：



$\therefore$ 在 $\triangle AEB$ 中， $\angle A + \angle B + \angle E = 180^\circ$ （三角形内角和），

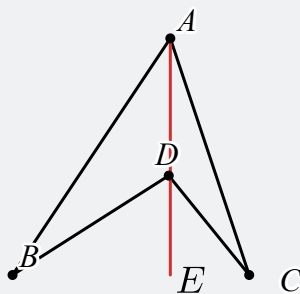
在 $\triangle CED$ 中， $\angle C + \angle E + \angle D = 180^\circ$ （三角形内角和），

又 $\because \angle AEB = \angle CED$ （对顶角相等）

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D$.

2、飞镖模型： $\angle D = \angle A + \angle B + \angle C$

证明：



连接 AD 并延长至点 E ,

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 中, $\angle BDE = \angle B + \angle BAE$,

在 $\triangle ACD$ 中, $\angle CDE = \angle C + \angle DAC$,

又 $\because \angle BDE + \angle CDE = \angle BDC$,

$\therefore \angle D = \angle A + \angle B + \angle C$.

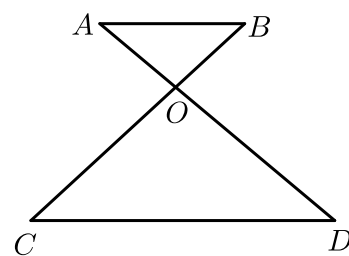
双垂模型与直角三角形模型均利用互余推导即可

例题1

【知识点拨】

这部分在讲解时,要让学生识别出8字、飞镖模型,同时能够熟练的利用结论进行解题。填空选择题可以直接利用结论,但是解答题要写出证明的过程,课上注意帮助学生捋解题过程。

1. 如图, $AB \parallel CD$, AD 、 BC 相交于 O 点, $\angle BAD = 35^\circ$, $\angle BOD = 76^\circ$,则 $\angle C$ 的度数是() .



A. 31°

B. 35°

C. 41°

D. 76°

【答案】C

【解析】 $\because AB \parallel CD$, $\angle BAD = 35^\circ$,

$\therefore \angle D = \angle BAD = 35^\circ$.

$\because \angle BOD = 76^\circ$,

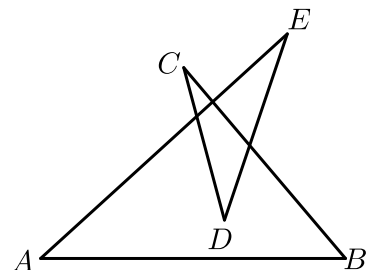
$\therefore \angle C = \angle BOD - \angle D = 41^\circ$.

故选C .

【标注】【知识点】三角形的外角定义及性质

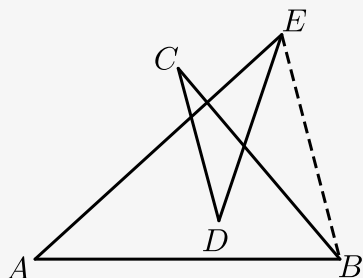
练习1

2. 如图, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 180°

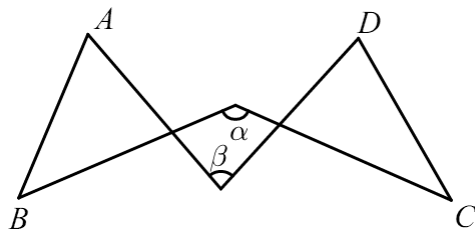
【解析】 连接 BE , 这五个角的和即转化为三角形 ABE 的内角和,



因此 $\angle A + \angle ABC + \angle C + \angle D + \angle AED = 180^\circ$.

【标注】【知识点】蝴蝶型 (8字倒角)

3. 如图, 已知 $\angle\alpha = 133^\circ$, $\angle\beta = 83^\circ$, 求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = (\quad)$.



A. 212°

B. 214°

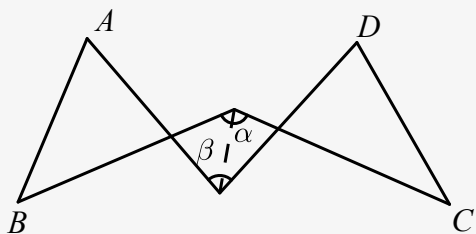
C. 216°

D. 218°

【答案】 C

【解析】 连接 $\angle\alpha$, $\angle\beta$ 两个顶点,

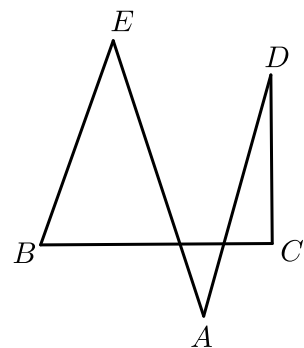
易知 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle\alpha + \angle\beta = 133^\circ + 83^\circ = 216^\circ$.



故选C.

【标注】【知识点】蝴蝶型（8字倒角）

4. 如图 $\angle A = 30^\circ$ ，求 $\angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ 的度数.



【答案】 210°

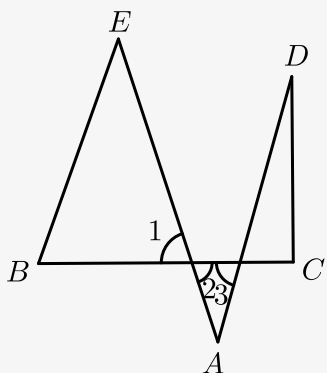
【解析】 $\because \angle B + \angle E + \angle 1 = \angle A + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle B + \angle E = \angle A + \angle 3$.

同理， $\angle C + \angle D = \angle A + \angle 2$.

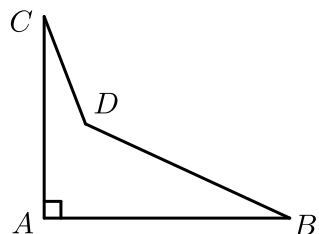
$\therefore \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle A + \angle 2 + \angle 3 + \angle A = 180^\circ + \angle A$.

$\because \angle A = 30^\circ$ ， $\therefore \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 210^\circ$.



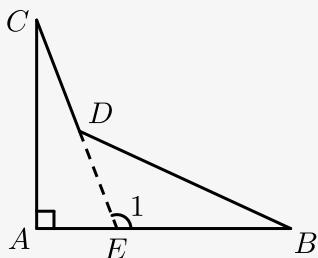
【标注】【知识点】不规则图形的多角求和

5. 如图，若检查工人量得一个零件的 $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = 32^\circ$ ， $\angle C = 21^\circ$ ，则 $\angle BDC =$ _____ 度。



【答案】 143

【解析】 如图，延长 CD 与 AB 相交于点 E ，



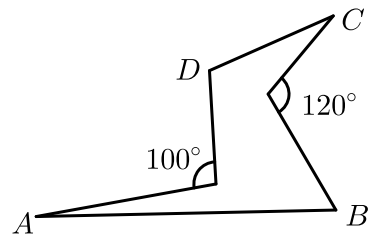
由三角形的外角性质得， $\angle 1 = \angle A + \angle C = 90^\circ + 21^\circ = 111^\circ$ ，
 $\angle BDC = \angle B + \angle 1 = 32^\circ + 111^\circ = 143^\circ$ 。

故答案为：143。

【标注】【知识点】燕尾形（飞镖型）

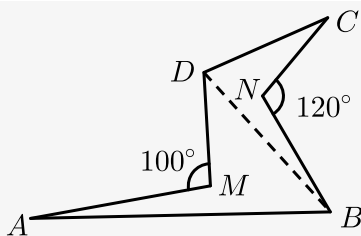
练习2

6. 如图， $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D =$ _____。



【答案】 220°

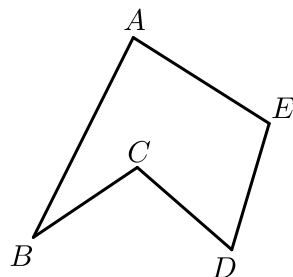
【解析】 连接 DB ，利用飞镖理论，



$$\begin{aligned}\angle AMD &= \angle A + \angle ABD + \angle MDB = 100^\circ, \\ \angle BNC &= \angle C + \angle CDB + \angle DBN = 120^\circ, \\ \therefore \angle A + \angle ABN + \angle C + \angle CDM &= 100^\circ + 120^\circ \\ &= 220^\circ.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】燕尾形（飞镖型）

7. 如图，已知 $\angle C = 105^\circ$ ，求 $\angle A + \angle B + \angle D + \angle E = \underline{\quad\quad}^\circ$ 。



【答案】285

【解析】连接 AD ，则由飞镖模型得：

$$\angle A + \angle B + \angle D + \angle E = \angle C + 180^\circ = 285^\circ$$

【标注】【知识点】燕尾形（飞镖型）

练习3

8. 已知：如图1，线段 AB 、 CD 相交于点 O ，连接 AD 、 CB ，我们把形如图1的图形称之为“8字形”，试解答下列问题：

（1）在图1中，试说明 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 之间的数量关系，推导过程如下：

$$\because \text{在} \triangle AOD \text{中}, \angle AOD + \underline{\quad\quad} + \angle A = 180^\circ,$$

$$\text{在} \triangle COB \text{中}, \angle COB + \underline{\quad\quad} + \angle C = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AOD = \angle COB,$$

$$\therefore \underline{\quad\quad}.$$

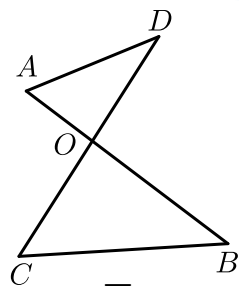


图 1

- (2) 在图2中, 若 $\angle D = 40^\circ$, $\angle B = 36^\circ$, $\angle DAB$ 和 $\angle BCD$ 的平分线 AP 和 CP 相交于点 P , 并且与 CD 、 AB 分别相交于 M 、 N , 利用 (1) 的结论, 试求 $\angle P$ 的度数.

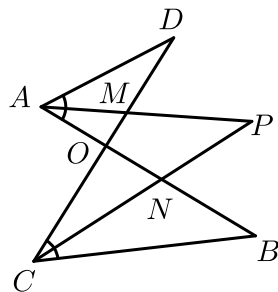


图2

- (3) 如果图2中 $\angle D$ 和 $\angle B$ 为任意角时, 其他条件不变. 试问 $\angle P$ 与 $\angle D$ 、 $\angle B$ 之间存在着怎样的数量关系.

【答案】 (1) $\angle D, \angle B, \angle A + \angle D = \angle B + \angle C$.

(2) 38° .

(3) $\angle P = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$.

【解析】 (1) $\because$ 在 $\triangle AOD$ 中, $\angle AOD + \angle D + \angle A = 180^\circ$,

在 $\triangle COB$ 中, $\angle COB + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$\therefore \angle AOD = \angle COB$ (对顶角),

$\therefore \angle A + \angle D = \angle B + \angle C$.

(2) 由 (1) 的结论:

$$\frac{1}{2}\angle DAB + \angle D = \angle P + \frac{1}{2}\angle BCD,$$

$$\angle DAB + \angle D = \angle B + \angle BCD$$

$$\Rightarrow \angle P = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$$

$$= \frac{1}{2} \times 76^\circ$$

$$= 38^\circ.$$

(3) 由 (1) 的结论:

$$\frac{1}{2}\angle DAB + \angle D = \angle P + \frac{1}{2}\angle BCD,$$

$$\angle DAB + \angle D = \angle B + \angle BCD$$

$$\Rightarrow \angle P = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D).$$

【标注】【知识点】蝴蝶型（8字倒角）

9. “8字”的性质及应用.

(1) 如图1, AD 、 BC 相交于点 O , 得到一个“8字” $ABCD$, 求证: $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

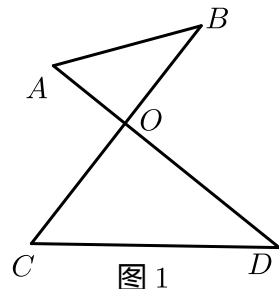


图 1

(2) 如(1)中方式, 图2中共有“8字” $ABCD$ 、“8字” _____ 和“8字” _____.

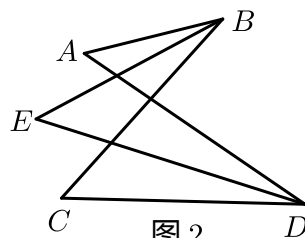


图 2

(3) 如图2, $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的平分线相交于点 E , 利用(1)中的结论证明:

$$\angle E = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C).$$

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $ABED$; $EBCD$

(3) 证明见解析.

【解析】(1) $\because \angle A + \angle B + \angle AOB = 180^\circ$, $\angle C + \angle D + \angle COD = 180^\circ$,

$$\angle AOB = \angle COD,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D.$$

(2) 如(1)中方式, 图2中共有“8字” $ABCD$ 、“8字” $ABED$ 和“8字” $EBCD$

故答案为 $ABED$, $EBCD$.

(3) $\because \angle A + \angle ABE = \angle E + \angle ADE$,

$$\angle E + \angle EBC = \angle C + \angle EDC,$$

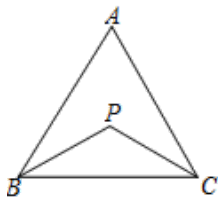
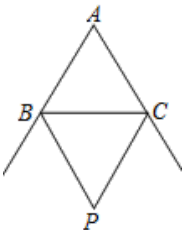
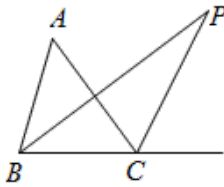
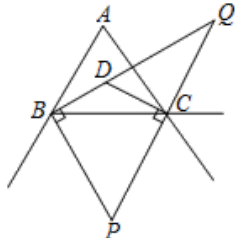
$$\therefore \angle ABE = \angle EBC, \angle ADE = \angle EDC,$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle A - \angle E &= \angle E - \angle C, \\ \therefore \angle E &= \frac{1}{2}(\angle A + \angle C).\end{aligned}$$

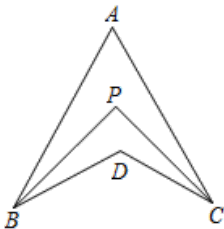
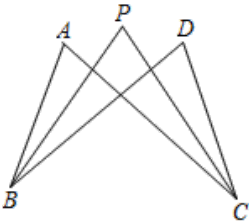
【标注】【知识点】蝴蝶型（8字倒角）

二、角平分线模型

1. 角平分线模型

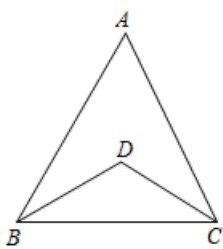
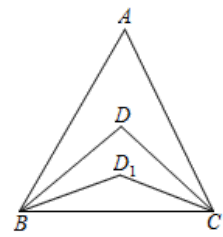
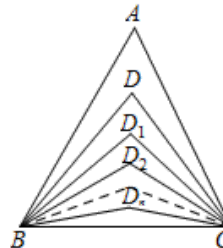
内角平分线模型	外角平分线模型	一内一外平分线模型	角平分线综合模型
			
$\angle P = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$	$\angle P = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$	$\angle P = \frac{1}{2}\angle A$	$\angle P + \angle Q = 90^\circ$ $\angle P + \angle BDC = 180^\circ$

2. 角平分线模型综合

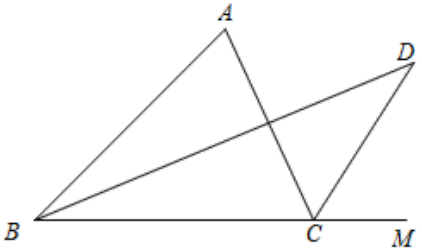
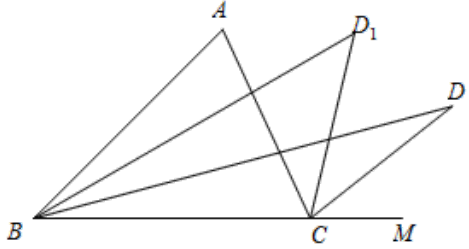
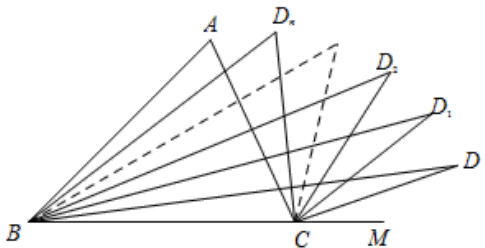
燕尾+角平分线	蝴蝶+角平分线
	
$\angle P = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$	$\angle P = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$

3. 角平分线模型结论

(1) 内角平分线模型结论

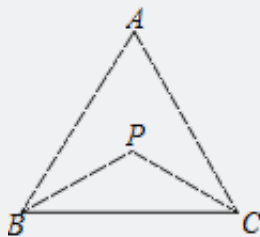
模型	结论
 角平分线	$\angle D = \frac{180^\circ + \angle A}{2}$
 角三等分线	$\angle D = \frac{180^\circ + 2\angle A}{3}$
...	...
 角n等分线	$\angle D = \frac{180^\circ + (n-1)\angle A}{n}$

(2) 一内一外角平分线模型结论

模型	结论
 角平分线	$\angle D = \frac{1}{2} \angle A$
 角三等分线	$\angle D = \frac{1}{3} \angle A$
...	...
 角n等分线	$\angle D = \frac{1}{n} \angle A$

【教法备注】

1、内角平分线模型： $\angle P = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$



证明：

$\because BP$ 平分 $\angle ABC$ ， PC 平分 $\angle ACB$ ，

$\therefore \angle ABP = \angle CBP = \frac{1}{2} \angle ABC$ ， $\angle ACP = \angle BCP = \frac{1}{2} \angle ACB$ ，

$\because \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$ ，

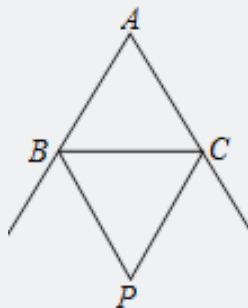
$\therefore \angle ABP + \angle ACP = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A)$ ，

又 $\because \angle P = \angle A + \angle ABP + \angle ACP$ (飞镖模型) ,

$$\therefore \angle P = \angle A + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A.$$

2、外角平分线模型： $\angle P = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

证明：



$\because BP$ 、 CP 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线，

$$\therefore \angle CBP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC), \angle BCP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB),$$

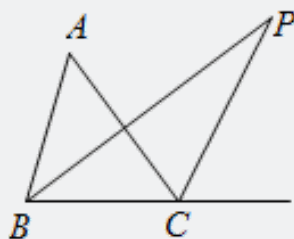
$$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

$\therefore$

$$\angle PBC + \angle PCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

$$\therefore \angle P = 180^\circ - (\angle CBP + \angle BCP) = 180^\circ - 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$$

3、一内一外角平分线模型： $\angle P = \frac{1}{2}\angle A$,



证明：

$\because BP$ 平分 $\angle ABC$ ， CP 为 $\triangle ABC$ 外角平分线，

$$\therefore \angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle ACP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB),$$

$$\text{又}\because \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ,$$

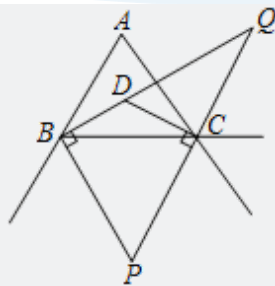
$\therefore$

$$\angle P = 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC - \angle ACB - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2}\angle A$$

4、角平分线综合模型： $\angle P + \angle Q = 90^\circ$

$$\angle P + \angle BDC = 180^\circ$$

证明：



由上方结论可得：

$$\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\angle P = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\angle Q = \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\therefore \angle P + \angle Q = 90^\circ,$$

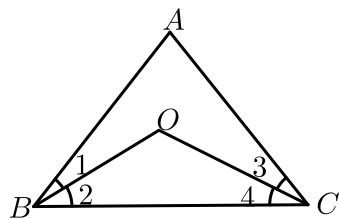
$$\angle P + \angle BDC = 180^\circ$$

|| 例题3

【知识点拨】

角平分线综合这部分难度会稍大一些，将角平分线与三角形内角和综合在一起，课上要带领学生梳理好证明的过程。同样也是选填直接用结论，解答题写证明过程。

10. 如图， O 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 BO 、 CO 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ ，若 $\angle A = 46^\circ$ ，则 $\angle BOC =$ _____；若 $\angle A = n^\circ$ ，则 $\angle BOC =$ _____。

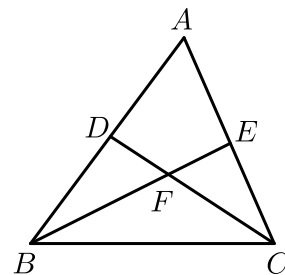


【答案】 113° ； $90^\circ + \frac{1}{2}n^\circ$

【标注】 【知识点】 三角形-内角角分线

|| 练习4

11. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 、 $\angle C$ 的平分线 BE 、 CD 相交于点 F ， $\angle A = 60^\circ$ ，则 $\angle BFC =$ _____。

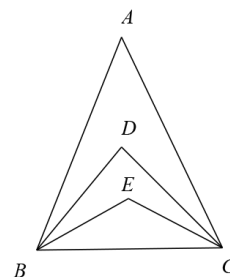


【答案】 120°

【解析】 $\because \angle A = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ$,
 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$, CD 平分 $\angle ACB$,
 $\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC$, $\angle DCB = \frac{1}{2} \angle ACB$,
 $\therefore \angle BFC = 180^\circ - (\angle EBC + \angle DCB)$
 $= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$
 $= 180^\circ - \frac{1}{2} \times 120^\circ$
 $= 120^\circ$.

【标注】 【知识点】 三角形-内角角分线

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 50^\circ$, E 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle BEC = 150^\circ$, $\angle ABE$ 的平分线与 $\angle ACE$ 的平分线相交于点 D , 则 $\angle BDC$ 的度数为多少?



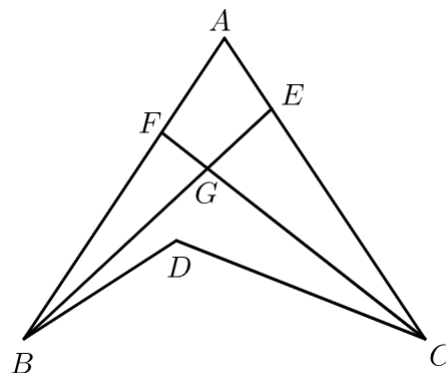
【答案】 100° .

【解析】 $\because \triangle ABC$ 中 $\angle A = 50^\circ$,
 $\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$,
 $\because \triangle BCE$ 中 $\angle E = 150^\circ$,
 $\therefore \angle EBC + \angle ECB = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$,
 $\therefore \angle ABE + \angle ACE = 130^\circ - 30^\circ = 100^\circ$,
 $\therefore \angle ABE$ 的平分线与 $\angle ACE$ 的平分线相交于点 D ,

$$\begin{aligned}
& \therefore \angle DBE + \angle DCE \\
&= \frac{1}{2}(\angle ABE + \angle ACE) \\
&= \frac{1}{2} \times 100^\circ \\
&= 50^\circ, \\
& \therefore \angle DBC + \angle DCB \\
&= (\angle DBE + \angle DCE) + (\angle EBC + \angle ECB) \\
&= 50^\circ + 30^\circ \\
&= 80^\circ, \\
& \therefore \angle BDC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.
\end{aligned}$$

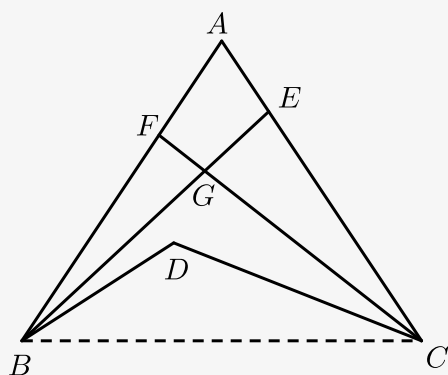
【标注】【知识点】三角形-内角角分线

13. 如图, BE 平分 $\angle ABD$, CF 平分 $\angle ACD$, BE 与 CF 相交于 G . 若 $\angle BDC = 140^\circ$, $\angle BGC = 100^\circ$, 则 $\angle A = \underline{\quad}$.



【答案】 60°

【解析】 连接 BC ,



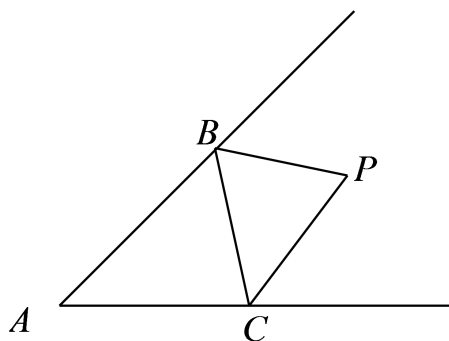
$$\because \angle BDC = 140^\circ,$$

$\therefore \angle DBC + \angle DCB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$,
 $\therefore \angle BGC = 100^\circ$,
 $\therefore \angle GBC + \angle GCB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$,
 $\therefore \angle GBD + \angle GCD = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$,
 $\therefore BE$ 是 $\angle ABD$ 的平分线 , CF 是 $\angle ACD$ 的平分线 ,
 $\therefore \angle ABG + \angle ACG = \angle GBD + \angle GCD = 40^\circ$,
 在 $\triangle ABC$ 中 , $\angle A = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 60^\circ$.
 故 $\angle A$ 的度数为 60° .

【标注】【知识点】三角形内角和的应用

|| 例题4

14. 如图 , $\triangle ABC$ 的 $\angle B$, $\angle C$ 的外角的平分线交于点 P .



- (1) 若 $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle A = 70^\circ$, 则 $\angle P =$ _____ .
- (2) 若 $\angle ABC = 48^\circ$, $\angle A = 70^\circ$, 则 $\angle P =$ _____ .
- (3) 若 $\angle A = 68^\circ$, 则 $\angle P =$ _____ .
- (4) 根据以上计算 , 试写出 $\angle P$ 与 $\angle A$ 的数量关系 .

【答案】 (1) 55°

(2) 55°

(3) 56°

(4) $\angle P = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$.

【解析】 (1) $\because \angle ABC = 50^\circ$,

$\angle A = 70^\circ$,

$\therefore \angle ACB = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \angle B$, $\angle C$ 的外角的平分线交于点 P ,

$$\begin{aligned}\therefore \angle PBC &= \frac{1}{2}(180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ, \\ \angle PCB &= \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ, \\ \therefore \text{在} \triangle PBC \text{中}, \\ \angle P &= 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = 55^\circ.\end{aligned}$$

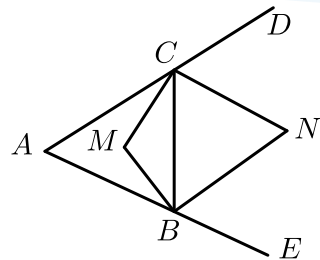
$$\begin{aligned}(2) \because \angle ABC &= 48^\circ, \\ \angle A &= 70^\circ, \\ \therefore \angle ACB &= 180^\circ - 48^\circ - 70^\circ = 62^\circ, \\ \therefore \angle B, \angle C \text{的外角的平分线交于点} P, \\ \therefore \angle PBC &= \frac{1}{2}(180^\circ - 48^\circ) = 66^\circ, \\ \angle PCB &= \frac{1}{2}(180^\circ - 62^\circ) = 59^\circ, \\ \therefore \text{在} \triangle PBC \text{中}, \\ \angle P &= 180^\circ - 66^\circ - 59^\circ = 55^\circ.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \because \angle B, \angle C \text{的外角的平分线交于点} P, \\ \therefore \angle PBC + \angle PCB, \\ &= \frac{1}{2}(\angle A + \angle ACB) + \frac{1}{2}(\angle A + \angle ABC), \\ &= \frac{1}{2}(\angle A + \angle ACB + \angle ABC + \angle A), \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ + \angle A), \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A, \\ \text{在} \triangle PBC \text{中}, \\ \angle P &= 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB), \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{1}{2}\angle A\right), \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A \\ \therefore \angle A &= 68^\circ, \\ \therefore \angle P &= 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ. \\ (4) \angle P &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】三角形-外角角分线

练习5

15. 如图，点 M 是 $\triangle ABC$ 两个内角平分线的交点，点 N 是 $\triangle ABC$ 两个外角平分线的交点，如果 $\angle CMB : \angle CNB = 2 : 1$ ，则 $\angle CAB$ 的度数为 _____ $^\circ$.



【答案】 60

【解析】 $\angle CMB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

$\angle CNB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$, 因为 $\angle CMB : \angle CNB = 2 : 1$.

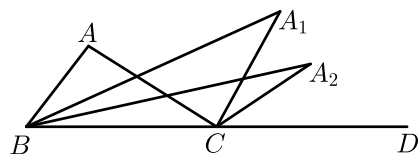
则 $90^\circ + \frac{1}{2}\angle A = 2\left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle A\right)$.

解得 $\angle A = 60^\circ$.

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

|| 例题5

16. 如图 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 96^\circ$, 延长 BC 到 D , $\angle ABC$ 与 $\angle ACD$ 的平分线相交于点 A_1 , $\angle A_1BC$ 与 $\angle A_1CD$ 的平分线相交于点 A_2 , 依此类推, $\angle A_4BC$ 与 $\angle A_4CD$ 的平分线相交于点 A_5 , 则 $\angle A_5$ 的度数为 ().



A. 3°

B. 6°

C. 19.2°

D. 24°

【答案】 A

【解析】 $\angle BA_1C + \angle A_1BC = \angle A_1CD$, $2\angle A_1CD = \angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$,

所以 $2(\angle BA_1C + \angle A_1BC) = \angle BAC + \angle ABC$,

$2\angle BA_1C + 2\angle A_1BC = \angle BAC + \angle ABC$,

而 $2\angle A_1BC = \angle ABC$,

所以 $2\angle BA_1C = \angle BAC$.

同理, 可得 $2\angle BA_2C = \angle BA_1C$, $2\angle BA_3C = \angle BA_2C$, $2\angle BA_4C = \angle BA_3C$,

$2\angle BA_5C = \angle BA_4C$,

所以

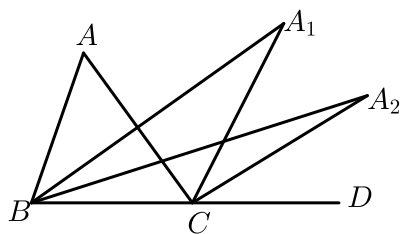
$$\angle BA_5C = \frac{1}{2}\angle BA_4C = \frac{1}{4}\angle BA_3C = \frac{1}{8}\angle BA_2C = \frac{1}{16}\angle BA_1C = \frac{1}{32}\angle BAC = 96^\circ \div 32 = 3^\circ$$

故选A.

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

练习6

17. 如图, $\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角, $\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACD$ 的平分线交于点 A_1 , $\angle A_1BC$ 的平分线与 $\angle A_1CD$ 的平分线交于点 A_2 , $\dots$ $\angle A_{n-1}BC$ 的平分线与 $\angle A_{n-1}CD$ 的平分线交于点 A_n , 设 $\angle A = \theta$, 则 $\angle A_n =$ _____.



【答案】 $\frac{\theta}{2^n}$

【解析】方法一：由三角形的外角性质得, $\angle ACD = \angle A + \angle ABC$,

$$\angle A_1CD = \angle A_1 + \angle A_1BC,$$

$\because \angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACD$ 的平分线交于点 A_1 ,

$$\therefore \angle A_1BC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle A_1CD = \frac{1}{2}\angle ACD,$$

$$\therefore \angle A_1 + \angle A_1BC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ABC) = \frac{1}{2}\angle A + \angle A_1BC,$$

$$\therefore \angle A_1 = \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\text{同理可得 } \angle A_2 = \frac{1}{2}\angle A_1 = \frac{\theta}{4},$$

$\dots$,

$$\angle A_n = \frac{\theta}{2^n}.$$

故答案为 $\frac{\theta}{2^n}$.

方法二： $\because A_1B$ 是 $\angle ABC$ 的平分线, A_1C 是 $\angle A_1CD$ 的平分线.

$$\therefore \angle A_1BC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle A_1CD = \frac{1}{2}\angle ACD,$$

又 $\because \angle ACD = \angle A + \angle ABC$, $\angle A_1CD = \angle A_1BC + \angle A_1$,

$$\therefore \frac{1}{2}(\angle A + \angle ABC) = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle A_1,$$

$$\therefore \angle A_1 = \frac{1}{2} \angle A,$$

$$\text{又} \because \angle A = \theta,$$

$$\therefore \angle A_1 = \frac{\theta}{2},$$

$$\text{同理可得} \angle A_2 = \frac{1}{2} \angle A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2^2}, \dots\dots$$

$$\text{所以} \angle A_n = \frac{\theta}{2^n}.$$

【标注】【知识点】三角形-外角角平分线

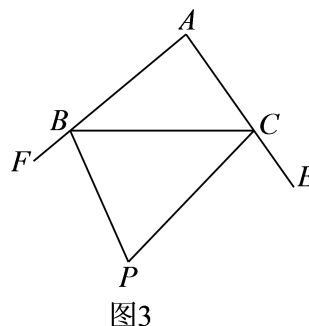
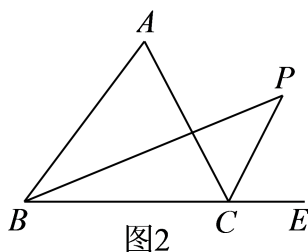
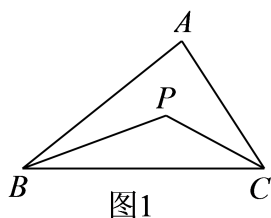
练习7

18. 已知 $\triangle ABC$,

(1) 如图1, 若点 P 是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线的交点, 则 $\angle P = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$.

(2) 如图2, 若点 P 是 $\angle ABC$ 和外角 $\angle ACE$ 的平分线的交点, 则 $\angle P = 90^\circ - \angle A$.

(3) 如图3, 若点 P 是外角 $\angle CBF$ 和 $\angle BCE$ 的平分线的交点, 则 $\angle P = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$.



上述说法正确的个数是 () .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】(1) 若点 P 是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线的交点,

$$\text{则} \angle PBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle PCB = \frac{1}{2} \angle ACB,$$

$$\text{则} \angle PBC + \angle PCB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A)$$

在 $\triangle BCP$ 中利用内角和定理得到:

$$\angle P = 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB) = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A, \text{故成}$$

立.

(2) $\because$ 点 P 是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACE$ 的平分线的交点,

$$\therefore \angle PBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle PCE = \frac{1}{2} \angle ACE,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ABC + \angle A,$$

$$\angle PCE = \angle PBC + \angle P,$$

$$\therefore 2\angle PCE = 2\angle PBC + 2\angle P = \angle ABC + 2\angle P = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle A = \angle ABC + 2\angle P,$$

$$\therefore \angle P = \frac{1}{2}\angle A.$$

(3) 若点P是外角 $\angle CBF$ 和 $\angle BCE$ 的平分线的交点,

$$\text{则 } \angle PBC = \frac{1}{2}\angle FBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\angle BCP = \frac{1}{2}\angle BCE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle PBC + \angle BCP = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB),$$

$$\text{又 } \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A,$$

$$\therefore \angle PBC + \angle BCP = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A,$$

在 $\triangle BCP$ 中利用内角和定理得到:

$$\angle P = 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A, \text{ 故成}$$

立,

$\therefore$ 说法正确的个数是2.

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线

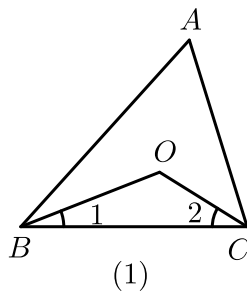
19. 请回答下列各题:

(1) 如图(1), 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的平分线相交于点O.

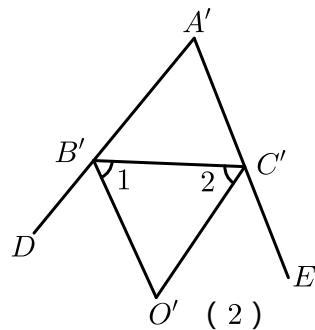
(a) 若 $\angle A = 60^\circ$, 求 $\angle BOC$ 的度数.

(b) 若 $\angle A = n^\circ$, 则 $\angle BOC =$ _____.

(c) 若 $\angle BOC = 3\angle A$, 则 $\angle A =$ _____.



(1)



(2)

(2) 如图(2), 在 $\triangle A'B'C'$ 中的外角平分线相交于点O', $\angle A' = 40^\circ$, 求 $\angle B'O'C'$ 的度数.

(3) 上面(1), (2)两题中的 $\angle BOC$ 与 $\angle B'O'C'$ 有怎样的数量关系?

【答案】 (1) (a) 120° .

$$(b) 90^\circ + \frac{1}{2}n^\circ.$$

$$(c) 36^\circ.$$

$$(2) 70^\circ.$$

$$(3) \angle B'O'C' = 180^\circ - \angle BOC.$$

【解析】(1) (a) $\because \angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O ,

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ)$$

$$= 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

(b) $\because \angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O ,

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$$

$$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - n^\circ)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}n^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}n^\circ\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}n^\circ.$$

故答案为: $90^\circ + \frac{1}{2}n^\circ$.

(c) $\because \angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O , $\angle BOC = 3\angle A$,

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\therefore 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A + 3\angle A = 180^\circ,$$

解得 $\angle A = 36^\circ$.

$$(2) \because \angle 1 = \frac{1}{2}\angle DB'C', \angle 2 = \frac{1}{2}\angle EC'B',$$

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2}(\angle A' + \angle A'C'B'),$$

$$\angle 2 = \frac{1}{2}(\angle A' + \angle A'B'C').$$

$$\therefore \angle O' = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$$

$$\begin{aligned}
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A' + \angle A' C' B') - \frac{1}{2}(\angle A' + \angle A' B' C') \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A' + \angle A' C' B' + \angle A' B' C' + \angle A') \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + \angle A') \\
&= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A' \\
&= 70^\circ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \because & \text{由(1)知, } \angle BOC = \frac{180^\circ + \angle A}{2}, \\
& \text{由(2)知, } \angle B'O'C' = 180^\circ - \frac{180^\circ + \angle A}{2}, \\
\therefore & \angle B'O'C' = 180^\circ - \angle BOC .
\end{aligned}$$

【标注】【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

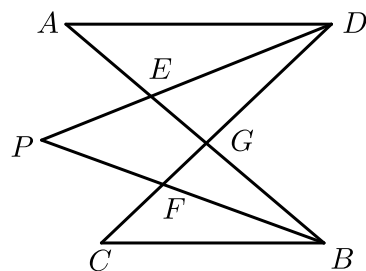
【知识点】角分线性性质定理

【知识点】三角形内角和的应用

【知识点】三角形-外角角分线

【知识点】三角形的外角定义及性质

20. 如图所示： DP 平分 $\angle ADC$ ， BP 平分 $\angle ABC$ ， DP 与 BP 相交于点 P ， AB 与 PD 相交于点 E ， CD 与 PB 相交于点 F ， AB 与 CD 相交于点 G 。



- (1) 若 $\angle A = 37^\circ$ ， $\angle C = 39^\circ$ ，求 $\angle P$ 是多少度。
- (2) 若 $\angle A = 47^\circ$ ， $\angle C = 53^\circ$ ，请直接写出 $\angle P$ 是多少度。
- (3) 若 $\angle A = \alpha$ ， $\angle C = \beta$ ，请直接写出 $\angle P$ 是多少度。

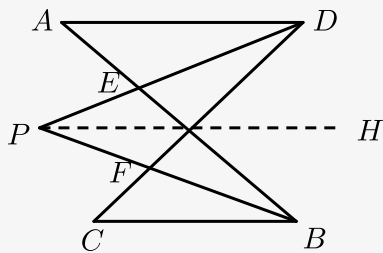
【答案】(1) $\angle P = 38^\circ$ 。

(2) $\angle P = 50^\circ$ 。

(3) $\angle P = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ 。

【解析】(1) 连接 PG 并延长至 H 。

如图，



$$\angle P = \angle DPG + \angle BPG .$$

$$\text{在} \triangle PDG \text{中}, \angle DPG = \angle DGH - \angle PDG .$$

$$\text{在} \triangle PGB \text{中}, \angle BPG = \angle BGH - \angle PBG .$$

$$\therefore \angle P = \angle DGH - \angle PDG + \angle BGH - \angle PBG = \angle DGB - \angle PDG - \angle PBG$$

.

$$\because AD \text{ 平分 } \angle ADC ,$$

$$\therefore \angle PDG = \frac{1}{2} \angle ADC .$$

$$\because BP \text{ 平分 } \angle ABC ,$$

$$\therefore \angle PBG = \frac{1}{2} \angle CBG .$$

$$\therefore \angle P = \angle DGB - \frac{1}{2} \angle ADG - \frac{1}{2} \angle CBG = \frac{1}{2} (2\angle DGB - \angle ADG - \angle CBG)$$

.

$$\because \text{在} \triangle ADG \text{中}, \angle A = \angle DGB - \angle ADG ,$$

$$\text{在} \triangle BCG \text{中}, \angle C = \angle DGB - \angle CBG .$$

$$\therefore \angle P = \frac{1}{2} (\angle A + \angle C) = \frac{1}{2} \times (37^\circ + 39^\circ) = 38^\circ .$$

$$(2) \angle P = \frac{1}{2} (\angle A + \angle C) = \frac{1}{2} \times (47^\circ + 53^\circ) = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ .$$

$$(3) \text{ 当 } \angle A = \alpha, \angle C = \beta \text{ 时}, \angle P = \frac{1}{2} (\alpha + \beta) .$$

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

21. 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 P .

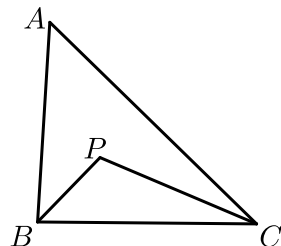


图 1

(1) 若 $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$, 则 $\angle A =$ _____ 度, $\angle P =$ _____ 度.

(2) $\angle A$ 与 $\angle P$ 的数量关系为 _____, 并说明理由.

(3)

如图2, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 P . $\angle ABC$ 的外角平分线与 $\angle ACB$ 的外角平分线相交于点 Q . 直接写出 $\angle A$ 与 $\angle Q$ 的数量关系为 _____ .

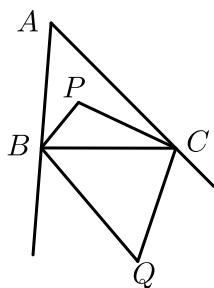


图 2

【答案】(1) 50 ; 115

(2) $\angle P - \frac{1}{2}\angle A = 90^\circ$, 理由见解析 .

(3) $\angle Q = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

【解析】(1) $\because \angle ABC = 50^\circ, \angle ACB = 80^\circ$,

$$\therefore \angle A = 50^\circ,$$

$\because \angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 P ,

$$\therefore \angle CBP = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle BCP = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle BCP + \angle CBP = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2} \times 130^\circ = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle P = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ,$$

故答案为 : 50 , 115 .

(2) $\because BP, CP$ 分别平分 $\angle ABC, \angle ACB$,

$$\therefore \angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle PCB = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\because \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ, \angle P + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle P + \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle P + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle P - \frac{1}{2}\angle A = 90^\circ.$$

(3) $\because \angle ABC$ 的外角平分线与 $\angle ACB$ 的外角平分线相交于点 Q ,

$$\therefore \angle CBQ = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\angle BCQ = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \triangle BCQ \text{ 中, } \angle Q = 180^\circ - (\angle CBQ + \angle BCQ)$$

$$= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB \right) = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB),$$

$$\text{又} \because \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A,$$

$$\therefore \angle Q = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A .$$

【标注】【知识点】三角形-内外角角分线